فصلنامه پژوهش در علوم، مهندسی و فناوری

دوره ۶، شماره ۴، زمستان ۱۳۹۹

صفحات ۱۲-۱۸

ISSN: 2476-5082

www.uctjournals.com

برآورد احتمالات انتقال در زنجیرهای مارکوف

فرشید اژدر

کارشناسی ارشد آمار ریاضی، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران.

چکیده

زنجیره مارکوف مدلی برای نمایش دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی است که در آن احتمال رویداد هر پیشامد فقط به پیشامد قبلی وابسته است. به این ترتیب احتمال رخداد پیشامدها در چنین مدلی فقط به زمان قبل وابسته بوده و بقیه پیشامدها در میزان احتمال دخالت نمی‌کنند. نجیره مارکوف بر اصل بدون یادآوری یا بی حافظه بنا شده است به این معنی که حالت بعدی سیستم، به حالت های قبلی آن بستگی ندارد. با این اصل، محاسبه احتمال عملیات مجاز بعدی بسیار ساده تر خواهد بود. البته حالت پیشرفته تری از زنجیره مارکوف با نام Latent MC در کاربردهای دنیای واقعی که وابستگی به عملیات قبلی هم جزء الزامات پیش بینی ها خواهد بود. این مطالعه با هدف برآورد احتمالات انتقال در زنجیرهای مارکوف صورت گرفته است.

کلید واژه: زنجیره مارکوف، احتمالات انتقال، تحلیل همبندی

مقدمه

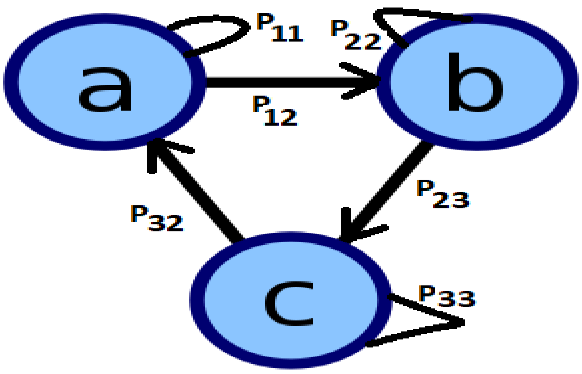
زنجیره مارکف که به افتخار آندری مارکوف ریاضی دان اهل روسیه این گونه نام گذاری شده یک سیستم ریاضی است که در آن انتقال از یک حالت به حالت دیگر صورت می‌گیرد که البته تعداد این حالات قابل شمارش است. زنجیره مارکوف یک مفهوم ساده است که توانایی بیان اغلب فرآیندهای پیچیده بلادرنگ را دارد. حوزه هایی مانند بازشناسی صدا، شناسایی متن و بسیاری از حوزه های هوش مصنوعی، به نحوی از این اصل ساده استفاده می کنند. زنجیره مارکوف بر اصل بدون یادآوری یا بی حافظه بنا شده است به این معنی که حالت بعدی سیستم، به حالت های قبلی آن بستگی ندارد. با این اصل، محاسبه احتمال عملیات مجاز بعدی بسیار ساده تر خواهد بود. البته حالت پیشرفته تری از زنجیره مارکوف با نام Latent MC در کاربردهای دنیای واقعی که وابستگی به عملیات قبلی هم جزء الزامات پیش بینی ها خواهد بود، استفاده میشود که در اینجا به آن نمی پردازیم.
فرض کنید مجموعه یS ،مجموعه ی کل حالتهایی باشد که یک سیستم میتواند اختیار کند و فرض کنید در هر مرحله از زمان،سیستم یا تغییر حالت میدهد یا همان حالت قبل را حفظ میکند. فراتر،فرض کنید ماتریس انتقال احتمال P با سطر و ستونهایی از S موجود است که اگر سیستم در یک مرحله ی زمانی در حالتsعضو S باشد،انگاه احتمال انکه در مرحله بعدی زمانی در حالت t عضو S باشد، t،(P)sاست که احتمال انتقال حالت از s به t از زمان و مسیر طی شده تا رسیدن به حالت s مستقل است. توجه کنید کهP(s)، sاحتمال باقی ماندن در حالت s در یک مرحله زمانی است و احتمال پیمودن هر مسیر،حاصل ضرب احتمال های هر مرحله زمانی است. چنین سیستمی را یک زنجیر مارکوف می نامند که باS(M) ، P نمایش می دهیم.
در این پایان نامه به معرفی برنامه کاربردی جدیدCA پرداخته می شود. این برنامه برای براورد احتمالات انتقال در زنجیره مارکوف کاربرد دارد. این امر بواسطه طرح های فاکتور کسری بر اساس حالت های مبدا کاربرد دارند، اساس این برنامه بر مبنای حالت های مبدا و مقصد می باشد و رتبه بندی را بر حسب احتمال برای حالت های مختلف در آینده انجام می دهد.
جنگ جانگ در مطالعه ای به بوسیله برنامه CA به بررسی ترکیب دادهای طراح و مشتری برای طراحی محصول پرداخت().
ون هارتون و همکاران به بررسی CA برای فاکتورهای ریسک – فایده بده بستان های اینترنتی پرداختند و نتایج نشان داد این برنامه برای ارزیابی ریسک- فایده کاربرد دارد.

زنجیره مارکوف و فرآیند مارکوف زمان-گسسته

دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی ...,X1,X2,...X1,X2را که احتمال تغییر وضعیت از زمان ttبه t+1t+1مستقل از وضعیت‌های قبلی باشد را یک زنجیره مارکوف می‌نامند. این گزاره را به بیان متغیرهای تصادفی و تابع احتمال به صورت زیر نشان می‌دهیم.

$$Pr(Xt+1=x|X1=x1,X2=x2,\dots,Xn=xt)=Pr(Xt+1=x|Xt=xt)Pr(Xt+1=x|X1=x1,X2=x2,\dots,Xn=xt)$$
$$=Pr(Xt+1=x|Xt=xt)$$

واضح است که در محاسبه این احتمال شرطی باید $Pr(X1=x1,\dots,Xn=xn)>0Pr(X1=x1,\dots,Xn=xn)>0$باشد در غیر اینصورت امکان محاسبه احتمال شرطی وجود ندارد. این احتمال به معنی طی کردن مسیر ($(X1=x1,\dots,Xn=xn)X1=x1,\dots,Xn=xn)$با احتمال مثبت در فرآیند تصادفی است. بنابراین در فرآیند تصادفی مارکوف، امکان رسیدن به نقطه $Xt=xtXt=xt$از مسیر یاد شده وجود دارد.
بنابراین اگر یک فرآیند تصادفی که به صورت دنباله‌ای نامتناهی از متغیرهای تصادفی معرفی می‌شود، دارای خاصیت مارکوفی باشد، آن را فرآیند تصادفی مارکوف می‌نامند. اگر فضای حالت در این فرآیند متناهی بوده، فرآیند را متناهی و در غیر اینصورت نامتناهی می‌نامند. از آنجایی که ساختار یک فرآیند مارکوفی به خصوصیات زنجیره مارکوفی برمی‌گردد، در ادامه به بررسی بیشتر زنجیره مارکوف خواهیم پرداخت.
لازم به ذکر است که برای نمایش زنجیره مارکوفی معمولا از گراف جهت‌دار استفاده می‌شود. مقدار هر یک از یال‌های این گراف، احتمال انتقال از یک راس به راس دیگر را نشان می‌دهد.



تصویر ۱- زنجیره مارکوف با فضای حالت سه وضعیتی

از آنجایی این گراف را می‌توان به صورت یک ماتریس نمایش داد، ماتریس این زنجیره مارکوف نیز به صورت «ماتریس احتمال انتقال (Transition Probability Matrix) قابل نمایش است. در این حالت عناصر ماتریس که به صورت p_{ij} نوشته می‌شوند، احتمال انتقال از نقطه i به j را نشان می‌دهد. به این ترتیب ماتریس انتقال برای گراف بالا به ترتیب راس‌ها (مقادیر مربوط به مجموعه فضای حالت) به صورت زیر قابل محاسبه است. واضح است که در اینجا فضای حالت دارای سه عنصر $S=\{a,b,c\}$ است.

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & 0 \\ 0 & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & 0 & P_{33} \end{bmatrix}$$

البته در این ماتریس با توجه به اصول احتمال باید $\sum_{j=1}^{k} p_{ij}=1$ باشد. یعنی مجموع احتمالات هر سطر در ماتریس باید برابر با ۱ باشد.

بطور کلی در زنجیره مارکوف، احتمال اینکه از وضعیت i به j در گام nام برسیم به صورت $p^{(n)}_{ij}$ نشان داده می‌شود. واضح است که به علت وجود خاصیت مارکوفی در زنجیره یا فرآیند مارکوفی داشته باشیم:

$$p^{(n)}_{ij}=\sum_{r\in S} p^{(k)}_{ir}\, p^{(n-k)}_{rj},\quad \forall k,\ 0<k<n$$

در حقیقت اگر بخواهیم احتمال گذر از یک نقطه و رسیدن به نقطه‌ای دیگر از فضای حالت را در n گام محاسبه کنیم باید ماتریس انتقال فرآیند را n بار در خودش ضرب کنیم. برای مثال اگر قرار باشد احتمال اینکه در یک گام از نقطه i به j برسیم را محاسبه کنیم از احتمال شرطی زیر استفاده خواهیم کرد.

$$p_{ij}=\Pr(X_1=j\mid X_0=i).$$

انجام این کار در طی n گام برای یک زنجیره مارکوف همگن-زمان، نیز به شکل زیر نوشته می‌شود.

$$p^{(n)}_{ij}=\Pr(X_{k+n}=j\mid X_k=i).$$

نکته: اگر رابطه زیر برای زنجیره مارکوف برقرار باشد آن را زنجیره مارکوف همگن-زمان (Time-Homogeneous Markov Chain) می‌گویند.

$$\Pr(X_{t+1}=x\mid X_t=y)=\Pr(X_t=x\mid X_{t-1}=y)$$

زنجیره مارکوف مرتبه k- یا k حافظه

همانطور که در ابتدای این متن اشاره شد، زنجیره مارکوف دارای خاصیت عدم حافظه است. اگر میزان حافظه زنجیره مارکوف به k مرحله یا زمان قبل محدود شود، به آن زنجیره مارکوف با حافظه یا مرتبه k گفته می‌شود. در این حالت رابطه زیر برقرار خواهد بود.

$$\Pr(X_n=x_n\mid X_{n-1}=x_{n-1},X_{n-2}=x_{n-2},\dots,X_1=x_1)=\Pr(X_n=x_n\mid X_{n-1}=x_{n-1},X_{n-2}=x_{n-2},\dots,X_{n-k}=x_{n-k}),\quad \text{for } n>k$$

زنجیره مارکوف تقلیل‌ناپذیر (Irreducible)

اگر رسیدن از هر نقطه به نقطه دیگر از فضای حالت با احتمال مثبت در زنجیره مارکوف میسر باشد، زنجیره را تقلیل‌ناپذیر گویند. به بیان ریاضی می‌توان تقلیل‌ناپذیر بودن زنجیره مارکوف را به صورت زیر نشان داد.

Pr(Xnij=j|X0=i)=p(nij)ij>0.Pr(Xnij=j|X0=i)=pij(nij)>0.

از این جهت نماد nijnijرا به کار برده‌ایم که نشان دهیم تعداد گام‌ها ممکن است با توجه به نقطه آغاز و پایان میسر متفاوت و متغیر باشد. واضح است که nijnijیک عدد طبیعی نامنفی است. ممکن است که این مقدار برابر با صفر باشد، که نشان دهنده احتمال درجا زدن برای زنجیره مارکوف است. به این ترتیب ممکن است در یک زنجیره مارکفی، با احتمال P11P11از نقطه یا وضعیت A به نقطه A درجا بزنیم.

زنجیره مارکوف تناوبی (Periodic)

اگر بتوان از وضعیت iiبا گام‌هایی از مضرب kkمجدداً به نقطه iiرسید، زنجیره مارکوف را تناوبی گویند. در چنین حالتی مقدار تناوب زنجیره به شکل زیر محاسبه می‌شود.

k=gcd{n>0:Pr(Xn=i|X0=i)>0}k=gcd{n>0:Pr(Xn=i|X0=i)>0}

توجه داشته باشید که در اینجا منظور از gcdgcdهمان بزرگترین مقسوم علیه مشترک است. گراف رسم شده در تصویر شماره ۱، یک زنجیره تناوبی با دوره تناوب ۱ است زیرا در گام‌های {1,3,4,5,6,⋯,}{1,3,4,5,6,⋯,}می‌توان از هر نقطه به همان نقطه رسید.

زنجیره‌های مارکوف یکنواخت در زمان

زنجیره‌های مارکوف یکنواخت در زمان، یا ایستا، زنجیره‌هایی هستند که در آن‌ها:

{\displaystyle \Pr(X_{n+1}=x|X_{n}=y)=\Pr(X_{n}=x|X_{n-1}=y)\,} که رابطه بالا برای هر n صحیح است. در واقع احتمال انتقال مستقل از n است. چنین زنجیره‌هایی را می‌توان تنها با یکماتریس احتمال انتقال {\displaystyle P}توصیف کرد. ماتریس احتمال انتقال {\displaystyle P}مستقل از زمان n است و درایه *(i,j)*ام آن، یعنی {\displaystyle p_{ij}}، بیانگر احتمال انتقال از حالت *i*به حالت *j* می‌باشد.

زنجیره مارکوف مرتبه m

زنجیره مارکوف مرتبه m که در آن m متناهی استفرایندی است که در آن:

{\displaystyle {\begin{aligned}{}&\Pr(X_{n}=x_{n}|X_{n-1}=x_{n-1},X_{n-2}=x_{n-2},\dots ,X_{1}=x_{1})\\=&\Pr(X_{n}=x_{n}|X_{n-1}=x_{n-1},X_{n-2}=x_{n-2},\dots ,X_{n-m}=x_{n-m}){\text{ for }}n>m\end{aligned}}}به عبارت دیگر حالت بعدی به m حالت قبلی وابسته‌است. می‌توان یک {Y_n} از {X_n} ساخت به طوری که در فرم کلاسیک خاصیت مارکوف صدق کند؛ که در این صورت Yیک چندتایی مرتب ازX ها است.

زنجیره مارکوف زمان پیوسته

لامپی را در نظر بگیرید که یا روشن است یا خاموش. اگر لامپ در زمان t روشن باشد X(t) = 1 و اگر خاموش باشد X(t) = 0.در این صورت متغیر تصادفی X زمان گسسته نیست زیرا پس از ورود به حالتی برای یک مدت زمانی که خود نیز متغیری تصادفی است، در آن جا می‌ماند و سپس به حالت دیگری منتقل می‌شود. این قبیل فرایندها را زنجیره مارکوف زمان پیوسته می‌نامیم. یک زنجیره پیوسته مارکف توسط یک فضای حالت متناهی یا شمارا، یک ماتریس نرخ انتقال Q با ابعادی برابر با فضای حالت است. برای$i \neq j$ ، هر عنصر q_{ij} غیر منفی است و نرخ انتقال فرایند را از حالت i به حالت j توصیف می‌کند.

ویژگی های زنجیره مارکوف

تقلیل‌پذیری

حالتj ام را قابل دسترسی از حالتi ام می‌نامند $(i \to j)$ اگر در سیستمی که از حالتi ام شروع شود با احتمال غیر ۰ در نهایت به حالتj ام برسد. در واقع اگر عدد صحیح $n \geq$ ۰وجود داشته باشد که {\displaystyle \Pr(X_{n}=j|X_{0}=i)=p_{ij}^{(n)}>0.\,}تساوی nبا ۰ به معنای در دسترس بودن همه حالات از حالتi ام است. حالتi ام را مرتبط با حالتj ام می‌نامند $(i \leftrightarrow j)$ اگر هر دو رابطه $i \to j$ و $j \to i$برقرار باشند.

مجموعه حالات Cرا کلاس مرتبط می‌نامند اگر هر یک از اعضای آن با هر عضو دیگر این مجموعه مرتبط باشد و هیچ‌یک از اعضای Cبا حالتی که عضو آن نیست مرتبط نباشد. می‌توان نشان داد که ارتباط همان هم‌ارزی است و کلاس‌های مرتبط در واقع کلاس‌های هم‌ارزی هستند. یک کلاس هم‌ارزی را بسته می‌نامند اگر احتمال خروج از این کلاس ۰ باشد. به عبارت دیگر اگر حالت i در C باشد و حالت j در C نباشد، jقابل دسترسی از i نیست. مجموعه‌ای از کلاس‌های مرتبط یک گراف جهت‌دار بدون دور را تشکیل می‌دهند که یال‌های آن همان یال‌های فضای حالت اصلی هستند. یک کلاس مرتبط بسته‌است اگر و تنها اگر هیچ یال خروجی میان کلاس‌های مختلف وجود نداشته باشد. حالت iرا ضروری می‌نامند اگر به ازای همه jهایی که $i \to j$، رابطه $j \to i$ نیز برقرار باشد. در غیر این صورت حالت iرا غیرضروری می‌نامند. اگر تمام وضعیت‌های یک زنجیر مارکوف با هم مرتبط باشند، فضای حالت تنها از یک کلاس مرتبط تشکیل می‌شود و به آن تقلیل‌ناپذیر می‌گویند. در این زنجیره‌ها از هر حالت می‌توان به هر حالتی رسید.

تناوب

حالت iدارای دوره تناوب k است اگر هر مسیر بازگشت به حالت iبه طول مضارب kباشد. به زبان دیگر دوره تناوب یک حالت برابر است با که در آن gcdبزرگترین مقسوم علیه مشترک است. اگر یک حالت دوره تناوب kداشته باشد ممکن است نتوان به این حالت با kحرکت رسید. به‌طور مثال اگر بتوان به حالت iدر {۶, ۸, ۱۰, ۱۲, ...} حرکت بازگشت، در این صورت دوره تناوب برابر ۲ خواهد بود حتی اگر ۲ در مقادیر ذکر شده نباشد. اگر $k =$ ۱ باشد، در این صورت به حالت مد نظر غیر متناوب می‌گویند و بازگشت به حالت iدر حرکت‌های غیر منظم انجام خواهد گرفت. در غیر این صورت$(k > 1)$ ، حالت iدارای دوره تناوب kو متناوب می‌باشد.

بازگشت‌پذیری

فرض کنید f_i احتمال این پیشامد باشد که زنجیر با شروع از وضعیت i بعد از تعداد متناهی تغییر وضعیت به i برگردد. به وضوح {\displaystyle f_{i}=\sum _{n=1}^{\infty }f_{ii}^{n}\,} اگر {\displaystyle f_{i}=1}در این صورت حالت i را بازگشتی یا پایا می‌گوییم. به این ترتیب هر بار که زنجیر در حالت i قرار می‌گیرد فرایند به‌طور احتمالی حرکت خود را از سر شروع می‌کند، لذا اولین بازگشت به i مستلزم بازگشت دوم بهi ، و الی آخر است؛ بنابراین اگر i حالت بازگشتی باشد، فرایند با احتمال ۱ بینهایت بار به i برمی‌گردد و احتمال اولین بازگشت به این حالت در زمان متناهی برابر ۱ است. اگر امید ریاضی تعداد تغییر وضعیت‌ها تا بازگشت مجدد به i متناهی باشد به i بازگشتی مثبت و در غیر این صورت بازگشتی پوچ می‌گوییم. حالت i را گذرا می‌نامند هرگاه {\displaystyle f_{i}<1}، به این معنی که اگر سیستم از حالت i شروع به کار کند، احتمال این که دیگر به این حالت بازنگردد غیر صفر است. برای حالت گذرای i احتمال این که فرایند با شروع از i دقیقاً بعد از n بار به آن بازگردد برابر است . پس تعداد بازگشت‌ها به i متغیر تصادفی با پارامتر {\displaystyle 1-f_{i}}می‌باشد، در نتیجه تعداد بازگشت‌ها بینهایت نمی‌شود.

با در نظر گرفتن متغیر تصادفیT_i ، زمان اولین بازگشت به حالت i، داریم:

عدد {\displaystyle f_{ii}^{(n)}=\Pr(T_{i}=n)}احتمال بازگشت سیستم به حالت iبرای اولین بار در حرکت nام است. در نتیجه حالت iگذرا است.

متوسط زمان بازگشت

اگر زمان اولین بازگشت به حالت i با احتمال ۱ متناهی باشد، نمی‌توان نتیجه گرفت که امید ریاضی این زمان متناهی است. امید ریاضی زمان بازگشت به حالت i همان متوسط زمان بازگشت است که از رابطه {\displaystyle M_{i}=E[T_{i}]=\sum _{n=1}^{\infty }n\cdot f_{ii}^{(n)}.\,} محاسبه می‌شود.

متوسط تعداد بازگشت‌ها

می‌توان نشان داد که حالت i پایا است اگر و تنها اگر متوسط تعداد بازگشت‌ها به این حالت نامتناهی باشد.

- اگر i گذرا باشد، زنجیره متناهی بار به i بازمی‌گردد.
- هر زنجیر مارکوف با فضای حالت متناهی حداقل یک حالت بازگشتی دارد
- بازگشتی بودن یک خاصیت رده‌ای است یعنی اگر i بازگشتی باشد و با j در ارتباط باشد، آنگاه j نیز بازگشتی است.
- گذرا بودن یک خاصیت رده‌ای است یعنی اگر i گذرا باشد و با j در ارتباط باشد، آنگاه j نیز گذرا است.
- در هر زنجیر مارکوف تقلیل‌ناپذیر یا تمام حالت‌ها گذرا یا تمام آن‌ها بازگشتی هستند. در هر زنجیر مارکوف تقلیل‌پذیر، عناصر هر رده یا همه گذرا یا همه بازگشتی هستند. در حالت اول رده را رده گذرا و در حالت دوم رده بازگشتی می گوییم.
- هر زنجیر مارکوف تقلیل‌ناپذیر متناهی، بازگشتی است.
- اگر در زنجیره مارکوف با فضای حالت متناهی بازگشتی باشد، در این صورت حتماً بازگشتی مثبت است.

حالت‌های مانا

حالت i را جذب‌کننده یا مانا می‌نامند اگر با ورود به این حالت خروج از آن غیرممکن باشد. در نتیجه حالت i مانا است اگر و تنها اگر اگر هر حالت در یک سیستم به حالت مانایی برسد زنجیره مارکوف را زنجیره مارکوف مانا می‌نامند.

زنجیره ارگودیک و زنجیره باقاعده

یک زنجیره مارکوف ارگودیک است ا اگر بتوان با تعدادی حرکت از هر حالتی به حالت دیگر رسید. زنجیره ارگودیک زنجیره تقلیل‌ناپذیر نیز نامیده می‌شود. زنجیره‌ای که هم تقلیل‌ناپذیر باشد و هم غیر متناوب، زنجیره باقاعده (regular) نامیده می‌شود. به عبارت دیگر زنجیره‌ای با قاعده است که تقلیل‌ناپذیر باشد و هر حالت آن نامتناوب و بازگشتی مثبت باشد. در زنجیره باقاعده n ای وجود دارد که اگر ماتریس انتقال حالت به توان n برسد تمام درایه‌های آن مثبت خواهند بود. بدین معنا که با n حرکت می‌توان از هر حالتی به حالت دیگر رسید.

نتیجه گیری

زنجیره مارکوف مدلی تصادفی برای توصیف یک توالی از رویدادهای احتمالی است که در آن احتمال هر رویداد فقط به حالت رویداد قبلی بستگی دارد. مدل مارکوف و مدل پنهان مارکوف در زمینه‌های مختلف بخصوص در هوش‌مصنوعی به منظور تشخیص دست‌خط یا گفتار، تصدیق امضا و همچنین تعیین الگوهای صوتی در موسیقی به کار می‌روند. نظریه صف (Queuing Theory) و اقتصاد سنجی و تشخیص الگوهای مالی نیز از زمینه‌هایی است که مدل مارکوف در آن بسیار به چشم می‌خورد. بنابراین حوزه استفاده از مدل‌های پنهان مارکفی و فرآیندهای تصادفی مارکوفی بسیار وسیع است. یکی از نتایج جالب از زنجیرهٔ مارکوف این است که با افزایش طول زنجیر (افزایش تعداد تغییر حالات)، احتمال رسیدن به یک حالت خاص به عددی ثابت همگرا خواهد شد. اکنون تمام شبکه جهانی وب را یک زنجیره مارکوف در نظر بگیرید که در آن هر صفحه یک حالت و پیوند میان آنان احتمال هر تغییر حالت را مشخص می‌کند. این نظریه می‌گوید مستقل از صفحه‌ای که از آن شروع کرده‌ایم، پس از مدتی طولانی گشتن در وب احتمال رسیدن به صفحه‌ای خاص مقدار ثابتی دارد. با این مدل‌سازی می‌توان گفت هر چه احتمال رسیدن به یک صفحه بیشتر باشد، آن صفحه از اهمیت بالاتری برخوردار است.

منابع

1- Box. George E P, Hunter Stuart J. and Hunter William G (2005), Statistics for Experimenters.
John Wily & Sons.Inc.,U.S.A.

2- Cao, C [etal] (1993), Time serials of rainfall and Their Stochastic Simulation,Urban Storm drainage. Italy, 25-28Jully 1993, 45-62.

۳- کاظمی، بهزاد و دبستانی، محمدکریم،۱۳۹۷،کاربرد زنجیره مارکوف در پیش بینی زوال روسازی،چهارمین کنفرانس سالانه ملی مهندسی عمران، معماری و شهرسازی ایران،مشهد

۴- اصغری، رحیم،۱۳۹۱،کاربرد زنجیرهای مارکوف دراقتصاد،کنفرانس بین المللی مدل سازی غیر خطی و بهینه سازی،آمل،

۵- سلطانی فهرج، سپیده و سرلک، ولی الله و گودرزی، میترا و رائیجی یانه سری، مهدی،۱۳۹۲،کاربرد مدل زنجیره مارکوف در تشخیص ناهنجاری عملکرد کامپیوتر،همایش ملی کاربرد سیستم های هوشمند (محاسبات نرم) در علوم و صنایع،قوچان.

۶- حسنوند، سیما و رشیدی، لقمان و شیخی بیات، سونا،۱۳۹۴،تحلیل مدت زمان اجرای رویدادها مبتنی بر زنجیره مارکوف و مدل نیمه مارکوف،دومین کنفرانس بین المللی پژوهش در مهندسی، علوم و تکنولوژی.

۷- صولتی، سیمین و صافی اصفهانی، فرامرز و ندیمی شهرکی، محمدحسین،۱۳۹۲،بررسی های مدل های جوان سازی نرم افزار توسط زنجیره مارکوف،اولین همایش ملی رویکردهای نوین در مهندسی کامپیوتر و بازیابی اطلاعات،رشت.