فصلنامه پژوهش در علوم، مهندسی و فناوری
دوره ۳، شماره ۴، زمستان ۱۳۹۶
صفحات ۲۶-۳۲
ISSN: 2476-5082
www.uctjournals.com

انقباض های تعمیم یافته در فضاهای متریک مرتب جزئی و کاربردهای آن در معادلات دیفرانسیل معمولی

دکتر جمال رضایی روشن[1] ، طیبه مسلمی قادیکلایی[2*]

۱استاد یار، ریاضی محض- آنالیز، دانشگاه آزاد اسلامی قائمشهر، قائمشهر
۲فارغ التحصیل کارشناسی ارشد، ریاضی محض – هندسه توپولوژی، دانشگاه آزاد اسلامی قائمشهر، قائمشهر
نویسنده مسئول، ایمیل: arezoomoslemi5878@yahoo.com

چکیده
هدف این مقاله ارائه برخی قضیه های نقطه ثابت در یک فضای متریک کامل با یک ترتیب جزئی با استفاده از توابع تغییر فاصله است. همچنین برخی کاربردهای معادلات دیفرانسیلی معمولی مرتبه اول و دوم را ارائه دادیم.

واژه‌های کلیدی: نقطه ثابت، تابع تغییر فاصله، مجموعه مرتب جزئی

مقدمه

اصل انقباض باناخ[1] یکی از نتایج اساسی آنالیز ریاضی می باشد و به طور چشمگیری به عنوان منبع نظریه نقطه ثابت در نظر گرفته می شود. علاوه بر این اهمیت آن در کاربرد گسترده آن در تعدادی از شاخه های ریاضیات می باشد. تعمیم اصول بالا شاخه ای از پژوهش است که در مورد آن بررسی بسیاری صورت گرفته است. به ویژه تعدادی از تحقیقات همراه با توابع تغییر فاصله ارائه شده است. آنها توابع کنترلی هستند که فاصله بین دو نقطه در یک فضای متریک را تغییر می دهند. این توابع توسط خان[2] و همکاران در (۱) معرفی شدند، که برخی از قضیه های نقطه ثابت را با کمک این دسته توابع ارائه می دهند. تعمیم قضیه نقطه ثابت باناخ با شرایط و فرضیات جدید روی فضای متریک داده شده و استفاده از نتایج حاصله برای حل تعدادی از معادلات دیفرانسیل معمولی در فضای متریک کامل مورد بحث قرار گرفته است، با شرایطی که روی ترتیب جزئی وضع می کنیم با استفاده از وجود جوابهای ضعیف وجود جوابهای یکتای معادلات دیفرانسیل مرتبه اول متناوب را بدست آوریم.هدف این مقاله ارائه برخی قضیه های نقطه ثابت در یک فضای متریک کامل با یک ترتیب جزئی با استفاده از توابع تغییر فاصله است. همچنین برخی کاربردهای معادلات دیفرانسیلی معمولی مرتبه اول و دوم را نشان دادیم.

مروری بر ادبیات

هدف مقاله حاضر ارائه برخی قضایای نقطه ثابت شامل توابع تغییر فاصله در زمینه فضاهای متریک مرتب است. وجود نقطه ثابت در مجموعه های مرتب جزئی اخیراً در مقالات [۲۲-۸] در نظر گرفته شده است. قضیه تارسکی[3]در [۱۴] وجود جوابهایی برای معادلات فازی را نشان می دهد و در [۱۶] قضایای وجودی برای معادلات دیفرانسیل فازی ثابت شده است.

در [۲۱-۱۵] برخی کاربردهای معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات ماتریسی به ترتیب ارائه شده اند. در [۲۲و ۱۱-۹] برخی قضایای نقطه ثابت برای نگاشت های یکنوای درهم در یک فضای متریک با ترتیب جزئی ثابت شد و نویسندگان این نتایج را برای مسائل وجودی و یکتایی جوابهای مسائل مرزی با شرایط اولیه به کار بردند. در زمینه فضاهای متریک مرتب، انقباض معمولی شرط ضعیفی است اما در صورتیکه عملگر یکنوا باشد، ایده اصلی در [۲۱و۱۵] شامل تلفیقی از ایده ها در اصل انقباض به همراه تکنیکهای بازگشتی یکنوا می باشد.

تعریف -۱: رابطه R روی مجموعه A یک رابطه ترتیبی جزئی نامند هر گاه:

۱. انعکاسی باشد، یعنی به ازای هر $x \in A$ ، xRx
۲. پاد تقارنی باشد.
۳. متعدی باشد، یعنی به ازای هر $x,y,z \in A$ اگر xRy و yRz آنگاه $x = z$

تعریف -۲: یک مجموعه مرتب جزئی $(S,\preccurlyeq)$ یک مجموعه مرتب کلی یا زنجیر نامیده می شود هر گاه به ازای هر $x,y \in S$ داشته باشیم یا $x \leq y$ یا $y \leq x$. به عبارتی هر دو عضو با هم مقایسه پذیر باشند.

تعریف -۳: یک متر در مجموعه ی X تابعی است مانند $d: X \times X \to R$ که دارای خواص زیر است:

۱. به ازای هر $x,y \in X$ ، $d(x,y) \geq 0$ و تساوی وقتی برقرار است اگر و فقط اگر $x = y$.
۲. به ازای هر $x,y \in X$ ، $d(x,y) = d(y,x)$
۳. (نامساوی مثلثی) به ازای هر $x,y,z \in X$ ، $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

تعریف -۴: فرض کنید d یک متر روی X باشد $d(x,y)$ را معمولاً فاصله بین x و y با متر d گویند. مجموعه X با متر d را یک فضای متریک می نامیم و با (X,d) نشان می دهیم.

1 .Banach
2.khan
3.Tarski

تعریف -۵: تابعی از یک متغیر صحیح مثبت را یک دنباله نامیده و با $f(n)$ یا x_n برای $n = 1,2,3,\ldots$ مشخص می کنند. بنابراین یک دنباله مجموعه های از اعداد $x_1, x_2, x_3, \ldots$ با ترتیب مشخص (متناظر با اعداد طبیعی) بوده و بر طبق قاعده ای معین شکل می گیرد. هر عدد در دنباله یک جمله خوانده می شود. x_n، n امین جمله ی دنباله نامیده می شود.

دنباله را بر حسب اینکه دارای تعداد متناهی یا نامتناهی جمله باشد، متناهی یا نامتناهی می نامیم.

دنباله $x_1, x_2, x_3, \ldots$ را مختصراً با $\{x_n\}$ مشخص می کنیم.

تعریف-۶: اگر (X,d) و (Y,p) دو فضای متریک باشند. تابع $f: X \to Y$ را پیوسته دنباله ای گوئیم:

$$x_n \xrightarrow{d} x \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \to f(x)$$

تعریف-۷: در فضای متریک X دنباله $\{x_n\}$ را یک دنباله کوشی گوییم هر گاه:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N \quad \forall m,n \geq n_0 \ \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

تعریف -۸: فضای متریک X را کامل گویند اگر و تنها اگر هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد.

تعریف -۹: مجموعه $A \subset X$ از فضای (X,d) کامل است، هر گاه هر دنباله کوشی در این مجموعه همگرا باشد.

تعریف -۱۰: فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد در این صورت خود نگاشت f روی X را یک انقباض در X گویند هرگاه عدد ثابتی مانند $0 \leq r < 1$ موجود باشد به قسمی که برای هر $x,y \in X$

$$d(f(x), f(y)) \leq r d(x,y)$$

تعریف -۱۱: فرض کنید g,f خود نگاشتهایی از فضای متریک (X,d) باشند. آن گاه این خود نگاشتها سازگار ضعیف نامیده می شود اگر برای یک $t \in X$ به طوری که $ft = gt$، آن گاه $fgt = gft$.

تعریف -۱۲: فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد. در این صورت زوج (X,d) از خود نگاشتهای روی X سازگار گوئیم اگر و فقط اگر $\lim_{n\to\infty} d(fgx_n, gfx_n) = 0$ که در آن $\{x_n\}$ دنباله ای در X است که $\lim_{n\to\infty} fx_n = \lim_{n\to\infty} gx_n = t$ برای یک $t \in X$.

تعریف -۱۳: مجموعه مرتب جزئی $(L, \preccurlyeq)$ را یک شبکه نامند هرگاه به ازای هر $x,y \in L$، $x \wedge y$, $x \vee y$ در مجموعه $(L, \preccurlyeq)$ باشد.

تعریف -۱۴: (X,d_1) و (X,d_2) دو فضای متریک باشند می گوییم تابع $f: X \to Y$ در نقطه $x_0 \in X$ پیوسته است هر گاه:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0; \ \forall x \in X, d_1(x,x_0) < r \Rightarrow d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

تعریف -۱۵: اگر (H,d) یک فضای متریک کامل باشد که در آن d متریک حاصل از ضرب داخلی باشد، آنگاه H را فضای هیلبرت نامند.

تعریف -۱۶: اگر $(X, \preccurlyeq)$ یک مجموعه مرتب جزئی و $f: X \to X$ می گوییم که f نانزولی یکنواخت است اگر:

$$x,y \in X, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

تعریف -۱۷: فرض کنیم که C منحنی ساده و بسته در صفحه XY بوده و D ناحیه محدود و کرندار بین منحنی C باشد. اگر L و M توابعی از دو متغیر x و y بوده و در میدان D پیوسته و دارای مشتق جزئی مرتبه اول پیوسته باشند، داریم:

$$\oint_c (Ldx + Mdy) = \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right) dA$$

تعریف -۱۸: فرض کنید X یک مجموعه و $\mathfrak{M} \subseteq P(X)$ گردایه ای از زیر مجموعه های X باشد. در این صورت $\mathfrak{M}$ را یک δ-جبر گوئیم هرگاه:

۱. $A \in \mathfrak{M}$،

۲. هرگاه $A \in \mathfrak{M}$ آنگاه $A^c \in \mathfrak{M}$ که در آن A^c متمم A نسبت به X است.

۳. هر گاه $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ و به ازای $n = 1,2,\ldots$, $A_n \in \mathfrak{M}$ آنگاه $A \in \mathfrak{M}$.

تعریف -۱۹: مجموعه X همراه با δ-جبر $\mathfrak{M}$ را فضای اندازه پذیر گویند و آن را به صورت $(X, \mathfrak{M})$ نشان می دهند. اعضای $\mathfrak{M}$ را مجموعه های اندازه پذیر در X گوییم.

تعریف -۲۰: فرض کنید $(X, \mathfrak{M})$ یک فضای اندازه پذیر باشد. تابع $\mu: \mathfrak{M} \to [0, +\infty]$ را تابع اندازه نامیم هر گاه جمعی شمارش پذیر باشد یعنی اگر $\{A_i\}_{n=1}^{\infty}$ گردایه ای شمارش پذیر و از هم جدا از اعضای $\mathfrak{M}$ باشد، آنگاه $\mu\langle \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \mu\{A_i\}$. و نیز فرض می کنیم به ازای دست کم یک $A \in \mathfrak{M}$، $\mu(A) < \infty$. در این صورت $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ را فضای اندازه گویند.

تعریف -۲۱: فرض کنید $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ یک فضای اندازه و $f, g: X \to \mathbb{C}$ هرگاه $\mu(\{x \in X: f(x) \neq g(x)\}) = 0$ آنگاه گوییم $f = g$ تقریباً همه جا روی X و آن را با نماد $f = g$، $(a.e)$ روی X نشان می دهیم.

نتیجه گیری

مهمترین مرحله در هر نوع مطالعه و پژوهش، مرحله بحث و نتیجه گیری است. بدیهی است پژوهش در هر زمینه ای که انجام شود، دارای هدف و انگیزه خاص است. لیکن آنچه مهم است نتایج و دست آوردهای حاصل از آن است که می تواند کاربرد پیدا کند و به منصه ظهور برسد. در این فصل به ارائه نتایج یافته های تحقیق و ارائه پیشنهاداتی برای انجام تحقیقات بعدی ارائه گردیده است.

نتیجه ۱: انقباض برای زوجهایی به کار می رود که نسبت به رابطه ی ترتیبی $\geq$ با هم در رابطه می باشند به عبارتی:

$$d\big(f(x), f(y)\big) = d\big(f(y), f(x)\big) \leq kd(y,x) = kd(x,y)$$

برای هر $x, y \in X$، که $x \leq y$.

نتیجه ۲: فرض کنید (X, d) فضای متریک کامل باشد، Ψ یک تابع تغییر فاصله و نگاشت $T: X \to X$ در شرط:

$$d(Tx, Ty) \leq d(x,y) - \Psi\big(d(x,y)\big)$$

به ازای هر $x, y \epsilon X$ صدق می کند، در این صورت T یک نقطه ثابت منحصر به فرد دارد.

نتیجه ۳: هر جفت از عناصر دارای یک کران پایینی و یک کران بالایی می باشند در اینصورت اگر فرض کنیم $(X, \preccurlyeq)$ یک مجموعه مرتب جزئی باشد و فرض کنیم که یک متریک d در X وجود داشته باشد به طوری که (X, d) یک فضای کامل متریک باشد. اگر $f{:}X{\to}X$ یک نگاشت پیوسته و نانزولی به قسمی باشد که برای یک $k \in [0,1)$ و برای هر $x \geq y$،

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x,y)$$

اگر $x_0 \in X$ موجود باشد که $x_0 \leq f(x_0)$ آنگاه f یک نقطه ثابت منحصر به فرد دارد.

نتیجه ۴: هر جفت از عناصر یک کران پایین و یک کران بالا داشته باشند،

آنگاه برای هر $x \in X$،

$$\lim_{n \to +\infty} f^n(x) = y$$

که در آن y نقطه ی ثابت f است به طوریکه

$$y=\lim_{n\to+\infty} f^n(x_0)$$

و از اینرو f یک نقطه ثابت دارد و این زمانی اعتبار دارد که X یک شبکه باشد.

نتیجه ۵: اگر X یک مجموعه مرتب کلی باشد و

$$d(a,c)\geq d(b,c) \qquad a\leq b\leq c$$

آنگاه موارد زیر برقرارند

۱. اگر $\{x_n\}$ یک دنباله نانزولی به قسمی باشد که $\lim_{n\to\infty} x_n=x$ ، آنگاه برای هر $x_n\leq x\ ,n\in N$

۲. هر جفت از عناصر یک کران پایین و یک کران بالا داشته باشند،

آنگاه برای هر $x\in X$،

$$\lim_{n\to+\infty} f^n(x)=y$$

که در آن y نقطه ی ثابت f است به طوریکه

$$y=\lim_{n\to+\infty} f^n(x_0)$$

و از اینرو f یک نقطه ثابت دارد.

اگر (x_n) یک دنباله نا نزولی در X باشد بطوریکه $x_n\to x$ آنگاه $x_n\leq x$ برای هر $n\epsilon N$. (۴-۹)

نتیجه ۶: فرض کنید $(X,\preccurlyeq)$ یک مجموعه مرتب جزئی، و یک متریک d در X موجود باشد به قسمی که (X,d) یک فضای متریک کامل باشد، در صورتیکه $f:X\to X$ نگاشت پیوسته و نانزولی باشد که برای هر $x\geq y$ و به ازای $x,y\epsilon X$ $z\epsilon X$ وجود دارد که با $x\ ,y$ قابل مقایسه است.

$$\Psi(d(f(x),f(y)))\leq\Psi\big(d(x,y)\big)-\Phi(d(x,y))$$

که در آن Ψ و Φ توابع تغییر فاصله هستند. اگر $x_0\epsilon X$ وجود داشته باشد بطوریکه $x_0\leq f(x_0)$ آنگاه f یک نقطه ثابت دارد و می توان نتیجه گرفت:

به ازای هر $x\epsilon X$ $\lim_{n\to\infty} f^n(x)=z$ که در آن z نقطه ثابت است. (یعنی عملگر f پیکارد است.)

نتیجه ۷: با توجه به نتیجه ۵-۶ اگر x با z قابل مقایسه باشد، آنگاه با استفاده از یک استدلال مشابه در نتیجه ۵-۶ می توان ثابت کرد که $\lim_{n\to\infty} d\big(z,f^n(x)\big)=0$ و در نتیجه $\lim_{n\to\infty} f^n(x)=z$

اگر x با z قابل مقایسه نباشد، عضوی چون $y\in X$ را به قسمی انتخاب می کنیم که با z و x قابل مقایسه باشد و با استدلال مشابه به کمک قضیه ۴-۳ نتیجه می گیریم که:

$$\lim_{n\to\infty} d\big(z,f^n(y)\big)=\lim_{n\to\infty} d(f^n(z),f^n(y))=0$$

$$\lim_{n\to\infty} d\big(f^n(x),f^n(y)\big)=0$$

در پایان با استفاده از

$$d\big(z,f^n(x)\big)\leq d\big(z,f^n(y)\big)+d\big(f^n(y),f^n(x)\big)$$

اگر $n\to\infty$ آنگاه $\lim_{n\to\infty} d\big(z,f^n(x)\big)=0$ ، یا بطور معادل $\lim_{n\to\infty} f^n(x)=z$

نتیجه ۸: جواب یکتای (۴-۱۳) به شکل $\lim_{n\to\infty} F^n(x)$ به ازای هر $x\epsilon C(I)$ بدست می آید. اگر انتخاب کنیم$x(t)=\alpha(t)$ آنگاه $F^n(x)$ یک دنباله نانزولی یکنوایی است که به جواب یکتایی (۴-۱۳) بطور یکنواخت همگراست.

پیشنهاد:

پیشنهاد می گردد با توجه به وسعت و دامنه گسترده ایی که درباره این موضوع مطرح است، نتایج مربوط به این پایان نامه را برای فضاهای b-متریک و G_b-متریک مرتب جزئی با تغییر فضای دو بعدی به سه بعدی و یا بیان و ارائه متریک دیگری که توسعه G_b-متریک باشد. برای جزئیات بیشتر خواننده را به [۲۵] ارجاع می دهیم.

منابع

[1] Khan, M.S. Swaleh, M. Sessa, S. Fixed point theorems by altering distances between the points, Bull. Austral. Math. Soc 30 (1) (1984) 1-9
[2] Babu, G.V.R. Lalitha, B. Sandhya, M.L. Common fixed point theorems involving two generalized altering distance functions in four variables, Proc. Jangjeon Math. Soc. 10 (2007) 83-93.
[3] Naidu, S.V.R. Some fixed point theorems in metric spaces by altering distances, Czechoslovak Math. J. 53 (2003) 205-212
[4] Sastry, K.P.R. Babu, G.V.R. Some fixed point theorems by altering distances between the points, Indian J. Pure App. Math. 30 (1999) 641-647.
[5] Alber, Ya.l. Guerre-Delabrier, S. Principles of weakly contractive maps in Hilbert spaces, in: Gohberg, Y. Lyubich (Eds.), New Results in Operator Theory and its Applications, in: Operator Theory: Advances and Applications, vol. 98. Birkhäuser, Basel, 1997, ṗp. 7-22
[6] Rhoades, B.E. Some theorems on weakly contractive maps, Nonlinear Anal. 47 (2001) 2683-2693
[7] Dhutta, P.N. Choudhury, B.S. A generalization of contraction principle in metric spaces, Fixed point theory Appl. (2008) Article ID 406368.
[8] Agarwal, R.P. El-Gebeily, M.A. ỎRegan, D. Generalized contractions principle in partially ordered metric spaces, Appl. Anal 87 (2008) 109-116
[9] Burgic, Dz. Kalabusic, S. Kulenovic, M.R.S. Global attractivity results for mixed monotone mappings in partially ordered complete metric spaces, fixed point theory Appl. (2009) Article ID 762478.
[10] Ciric, L. Cakid, N. Rajovic, M. Uma, J.S. Monotone generalized nonlinear contraction in partially ordered metric spaces, Fixed Point Theory Appl. (2008) Article ID 131294.
[11] Gana Bhaskar, T. Lakshmikantham, V. Fixed point theorems in partially ordered metric spaces and applications, Nonlinear Anal. 65 (2006) 1379-1393.
[12] Harjani, J. Sadarangani, K. Fixed point theorems for weakly contractive mappings in partially ordered sets, Nonlinear Anal.71 (2009) 3403-3410.
[13] Lakshmikantham, V. Ciric, L. Coupled fixed point theorems for nonlinear contractions in partially ordered metric spaces, Nonlinear Anal. 70(2009) 4341-4349.
[14] J Nieto, J. Rodriguez-LỎpez, R. Existence of extremal solutions for quadratic fuzzy equations, Fixed Point Theory Appl. (2005) 321-342.
[15] J Nieto, J. Rodriguez-LỎpez, R. Contractive mapping theorems in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations, Order 22 (2005) 223-239.
[16] J, J Nieto, R. Rodriguez-LỎpez, Applications of contractive – like mapping principles to fuzzy equations, Rev. Math. Complut. 19 (2006) 361-383.
[17] J Nieto, J. Pouso, R.L. Rodriguez-LỎpez, R. Fixed point theorems in ordered abstract spaces, Proc. Amer. Math. Soc.. 135 (2007) 2505-2517.

[18] J Nieto, J. Rodriguez-LÓpez, R. Existence and uniqueness of fixed point in partially ordered sets and application to ordinary differential equations, Acta Math. Sinica 23 (2007) 2205-2212.
[19] ÓRegan, D. Petrusel, A. Fixed point theorems for generalized contraction in ordered metric spaces, J. Math, Anal. 341 (2008) 1241-1252.